Теорема о биссектрисе, просто

Спасский Станислав

Теорема о биссектрисе сформулирована еще в шестой книге «Начал Евклида» (300 лет до н.э.). **Формулировка: Биссектриса** треугольника **делит противоположную сторону** треугольника **на два отрезка**, **длины** которых **пропорциональны** соответствующим **прилежащим сторонам** треугольника.

Существует несколько вариантов доказательства. Как правило это:

1) метод площадей;

2) приведение дополнительными построениями к подобным треугольникам.

Покажем оба метода и рассмотрим, как можно **упростить метод площадей**.

Начнем с метода площадей. Он, к сожалению, использует тригонометрическую функцию sin. (Формула **S=a·b·sinα/2** дается **неоправданно поздно**, где-то 9-й кл.). С формулой **S=a·h/2** начинают знакомить еще в 5-м. С биссектрисой знакомят в начале 7-го класса. С подобными треугольниками - в начале 8-го.

М**етод площадей** (рисунок ниже). Рассматривается **отношение площадей двух** треугольников, создаваемых **биссектрисой**. Сначала их площади вычисляются по **соответствующей боковой стороне**, **биссектрисе** и **синусу угла α** между ними.

Потом то же отношение площадей вычисляется через **высоту** и **основания** обоих **треугольников**. **Приравнивая**, получаем соотношение теоремы биссектрисы.

Метод площадей с использованием теоремы синусов

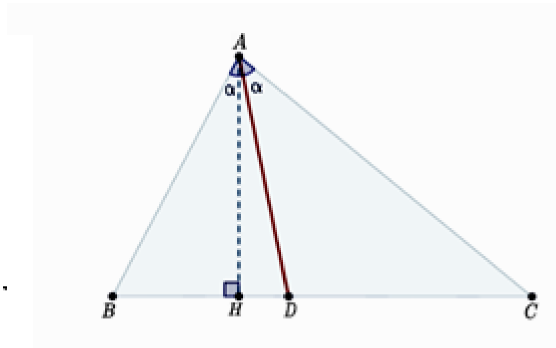
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin\alpha} = \frac{AB}{AC}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AH}{\frac{1}{2}CD \cdot AH} = \frac{BD}{CD}.$$

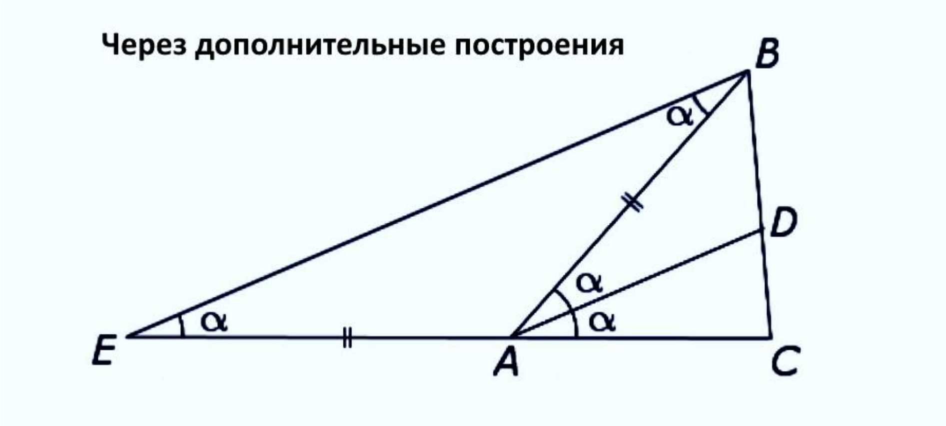
Значит,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$



Теперь рассмотрим **два способа,** использующих **дополнительные построения** к треугольнику **ABC, сводящие задачу к соотношению подобных треугольников (тема 8-го кл.)**.

Первый метод. Из одной боковой вершины (**B**) треугольника **ABC** строится прямая, параллельная биссектрисе. Получаем 2 подобных треугольника. В основании имеем отношение боковых сторон исходного треугольника. На другой стороне (справа) имеем два отрезка, на которые биссектриса делит сторону **BC**. Ясно, что оба отношения одинаковы. **Построение и далее доказательство не самые простые.**

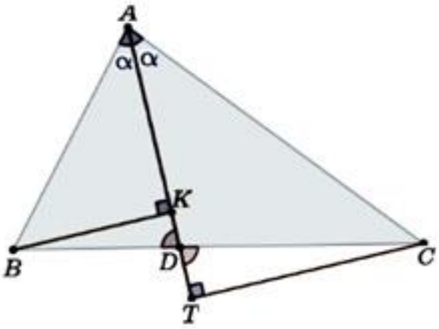


2-й метод. Из боковых вершин строятся 2 перпендикуляра к биссектрисе. Сначала рассматривается отношение малых треугольников при основании **BKD** и **CTD**, которые пропорциональны двум частям основания. Затем смотрят отношение прямоугольных треугольников **ABK** и **ACT**. У них то же отношение, что и у малых треугольников.

Через подобие треугольников

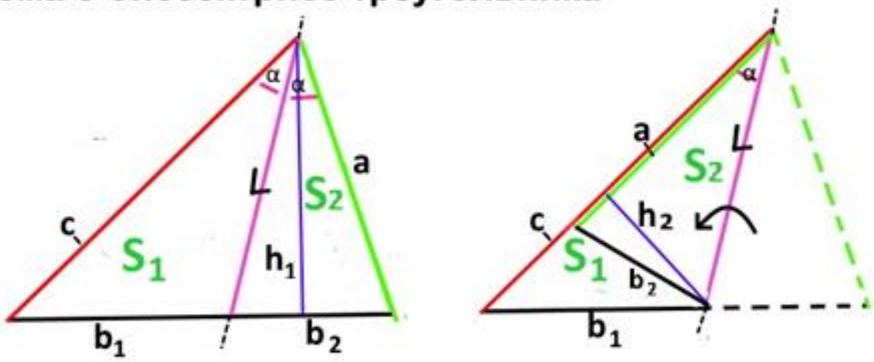
$$\frac{BD}{CD}=\frac{BK}{CT}, \qquad \frac{AB}{AC}=\frac{BK}{CT}.$$

Отсюда получаем, что $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}.$



А вот **предлагаемый** вариант метода площадей, но без использования функции sin. Его можно давать сразу с изучением биссектрисы. С 7-го класса.

Теорема о биссектрисе треугольника



Биссектриса L делит треугольник на 2, с площадями S1 и S2

$\frac{S1}{S2}=\frac{b1}{b2}$ **, т.к. высота h1 общая.**

Перегиб по биссектрисе.

$\frac{S1}{S2}=\frac{c}{a}$ **, т.к. высота h2 общая.**

Получаем теорему о биссектрисе: $\frac{b1}{b2}=\frac{c}{a}$

Учителю, если предоставляется возможность, нужно давать ученикам простые доказательства в качестве пропедевтики. «Сеять зерна». Наши учебники и подходы страдают обязательным пирамидальным построением: **ничего** о том, что в пирамиде по программе стоит одним или двумя этажами выше. «Не положено!» Но дети не роботы. Они этой «железной пирамидальности» общей картины не воспринимают! Может быть, потом, в зрелом возрасте. А в своем возрасте они строят мир из фрагментов. А такие моменты пропедевтики делают уроки интереснее. Отрицание пропедевтики - это **наша** традиционная неадекватность.